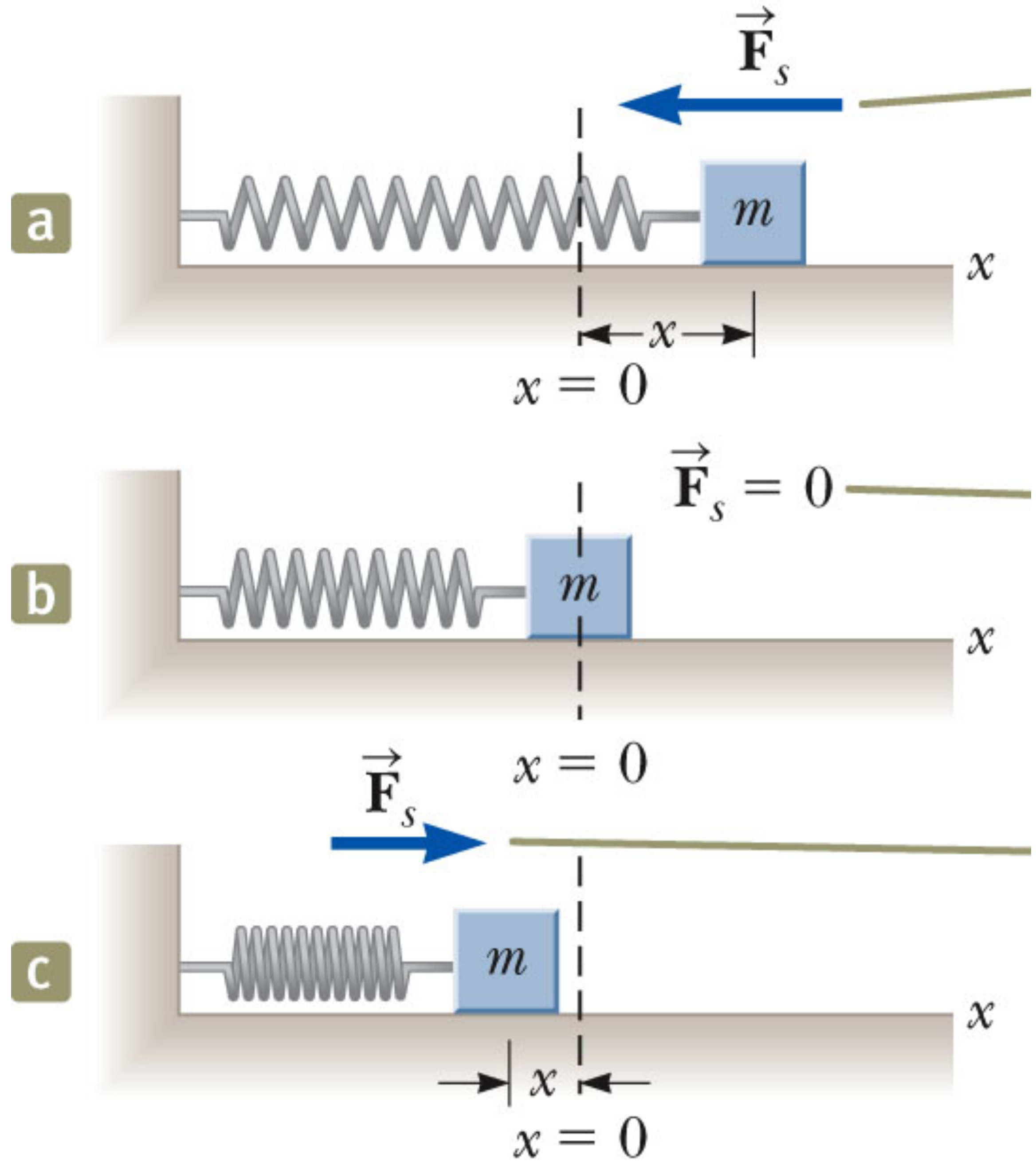
Oscillateur harmonique

1. Oscillateur harmonique
2. Pendule mathématique
3. Oscillateur harmonique amorti
4. Oscillateur harmonique forcée
5. Résonance, oscillateurs couplés

Ondes

- ondes mécaniques et électromagnétiques
- ondes stationnaires
- intreférence

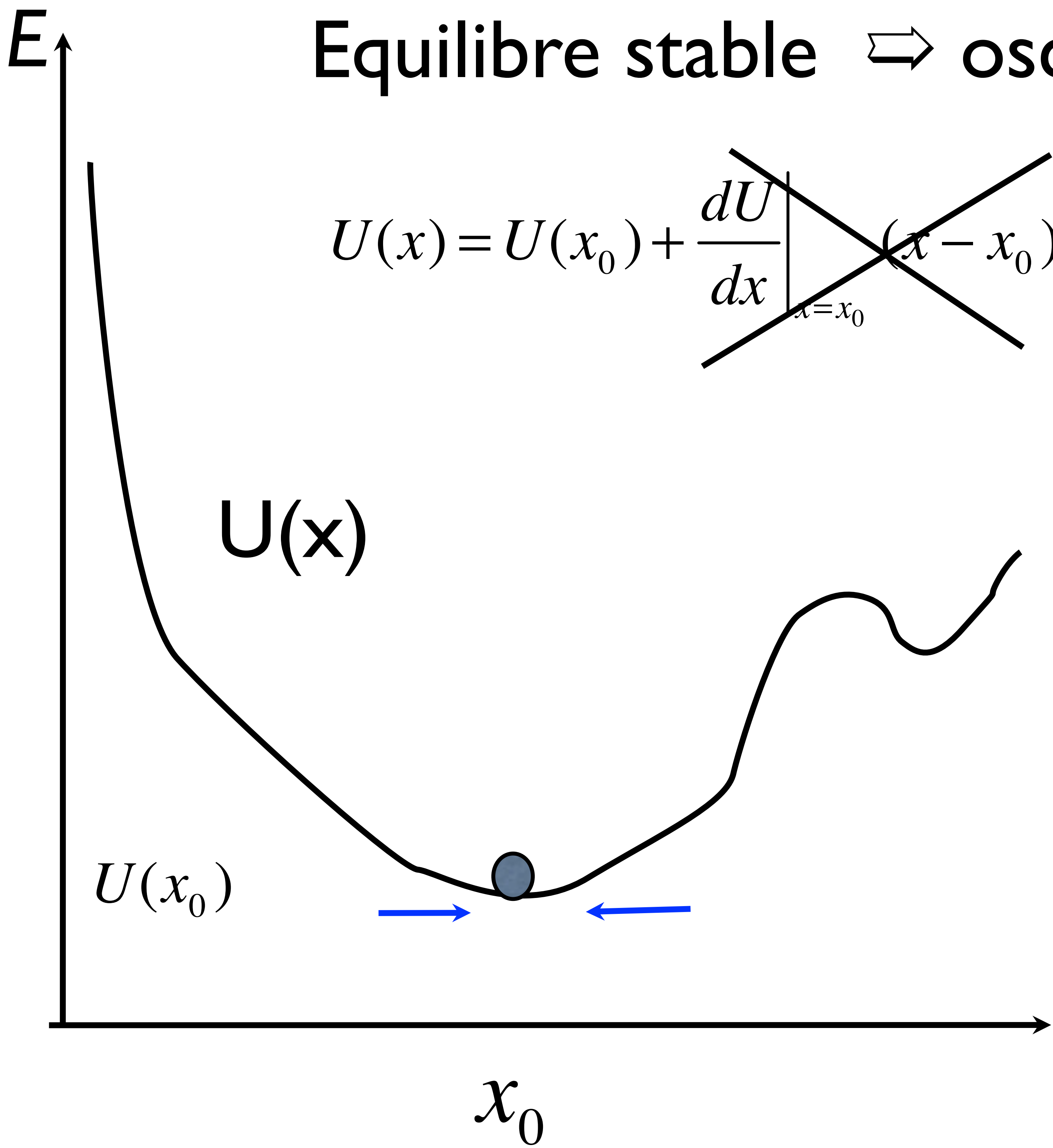
Masse attaché à un ressort



Oscillateur harmonique

Equilibre stable ⇨ oscillation

$$U(x) = U(x_0) + \cancel{\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0)} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^2$$



$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Oscillateur harmonique

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F(x) = -kx$$

$$ma = -kx$$

équation différentielle :

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

Deux solutions possibles:

équation horaire :

$$x_1 = \sin\omega t$$

$$x_2 = \cos\omega t$$

Vérification de la solution

$$x_1 = \sin\omega t \qquad v_1 = \omega\cos\omega t \qquad a_1 = -\omega^2 \sin\omega t$$

$$x_2 = \cos\omega t \qquad v_2 = -\omega\sin\omega t \qquad a_2 = -\omega^2 \cos\omega t$$

$$-\omega^2 \sin\omega t = -\frac{k}{m}\sin\omega t$$

$$-\omega^2 \cos\omega t = -\frac{k}{m}\cos\omega t$$

Condition nécessaire :
la fréquence propre est imposé

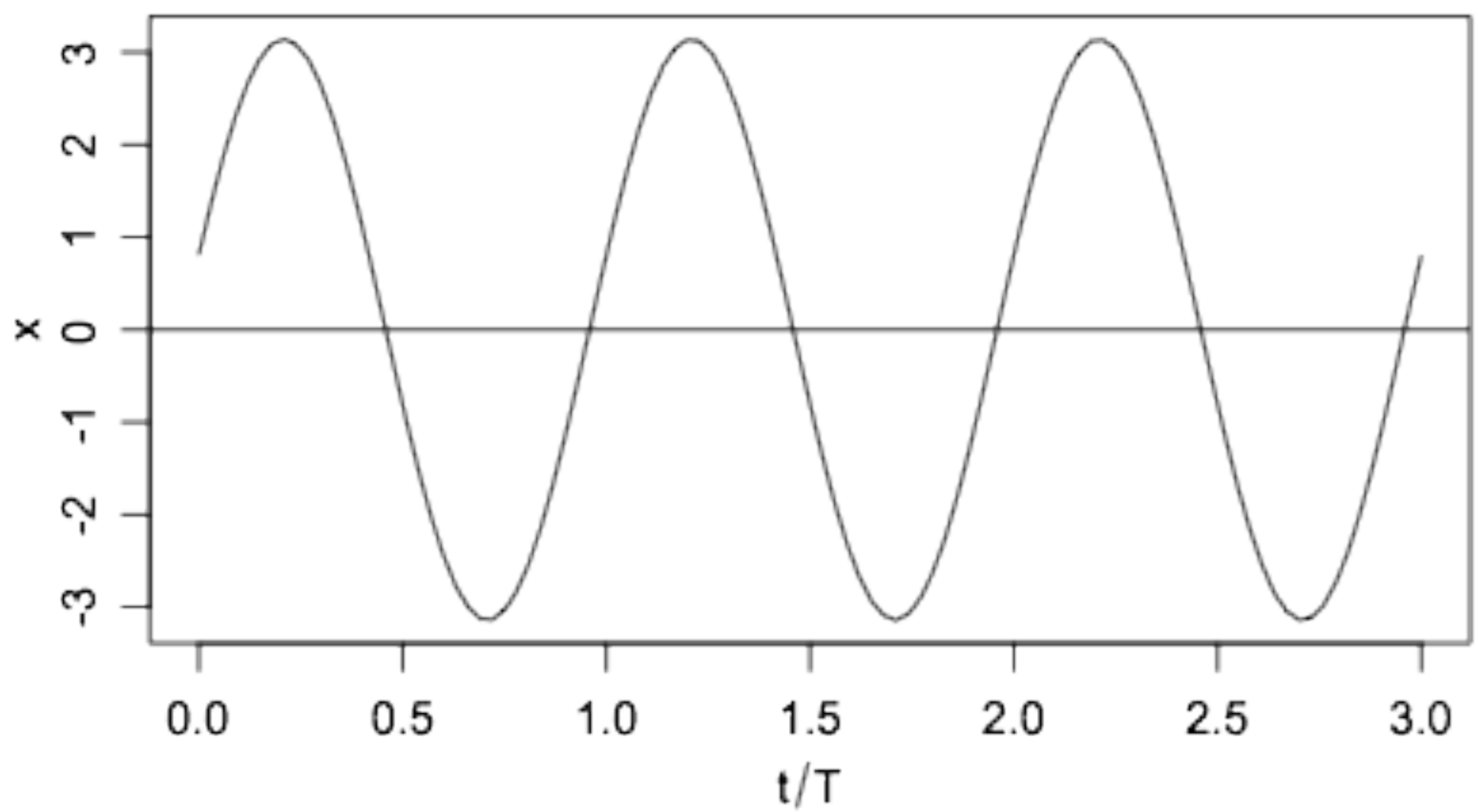
$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

La solution générale

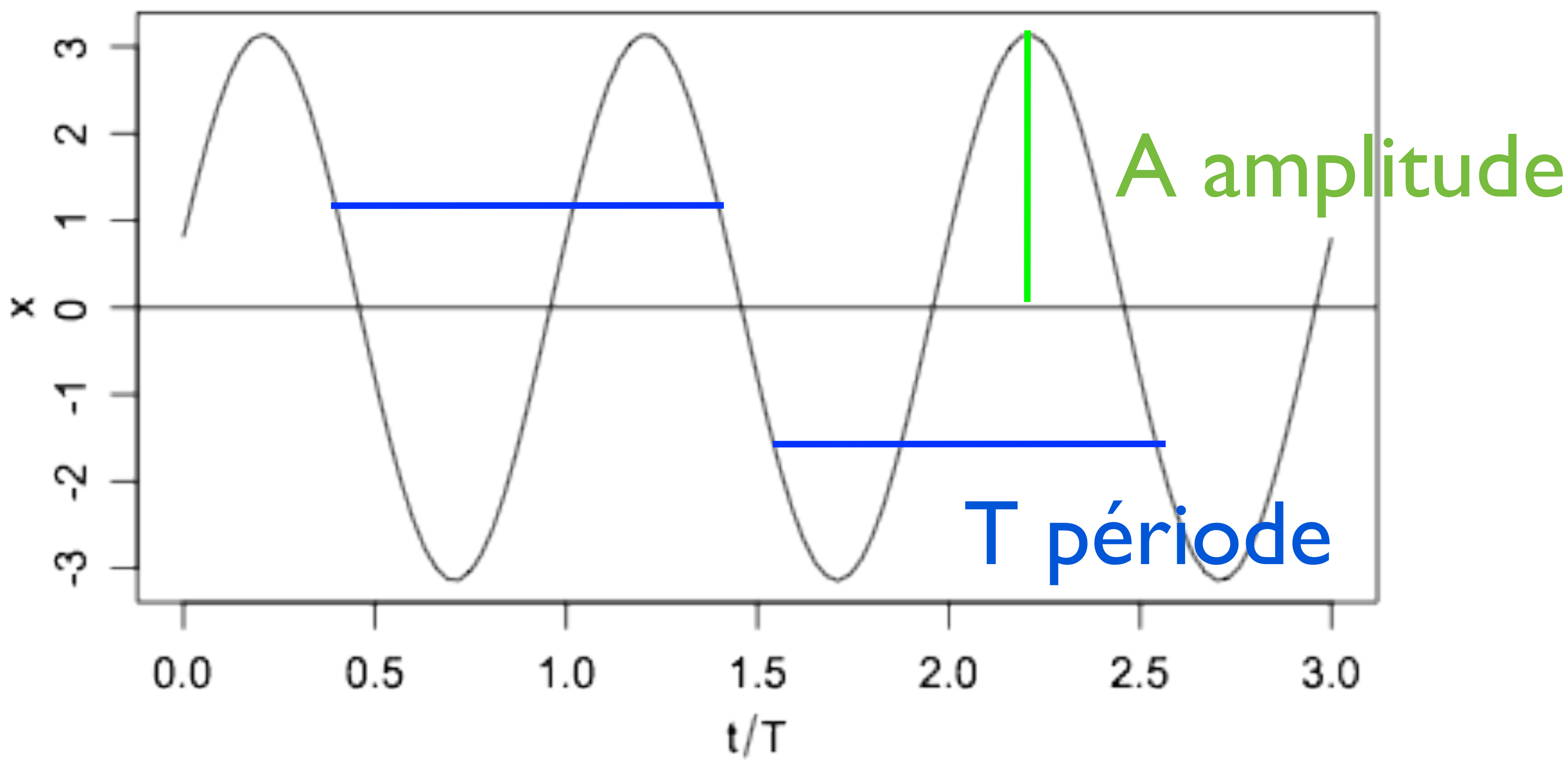
$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$x = C\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x = C\cos\varphi\sin\omega t + C\sin\varphi\cos\omega t$$



Oscillateur harmonique



$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t+T) = x(t)$$

Pendant une période,
la phase change par 2π

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad f = \frac{1}{T}$$

Exemple : trouver *x*(*t*)

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

contitions initiales :

$$x(t=0) = x_0$$

$$v(t=0) = v_0$$

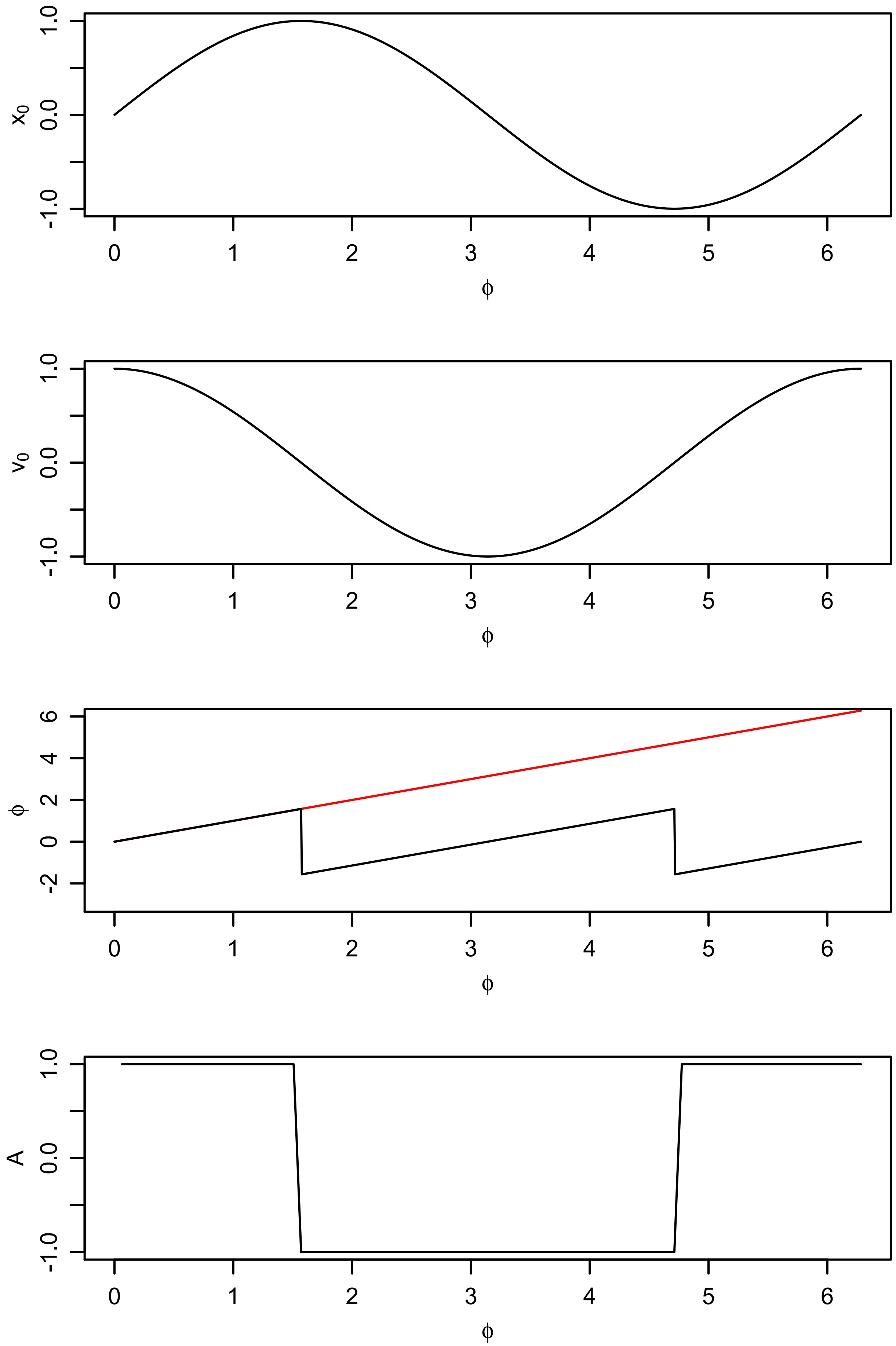
$$A\sin\varphi = x_0$$

$$A\omega\cos\varphi = v_0$$

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{x_0}{\omega v_0}\right)$$

$$A' = \frac{x_0}{\sin\varphi}$$

candidats de solution seulement...



... car l'arctan ne donne pas toujours la bonne angle!

Exemple : trouver $x(t)$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

contitions initiales :

$$x(t=0) = x_0$$

$$v(t=0) = v_0$$

$$A\sin\varphi = x_0$$

$$A\omega\cos\varphi = v_0$$

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{x_0}{\omega v_0}\right)$$

$$A' = \frac{x_0}{\sin\varphi}$$

$$A = A' \text{ si } A' > 0 \text{ sinon } A = -A'$$

$$\varphi = \varphi' \text{ si } A' > 0 \text{ sinon } \varphi = \varphi' + \pi$$

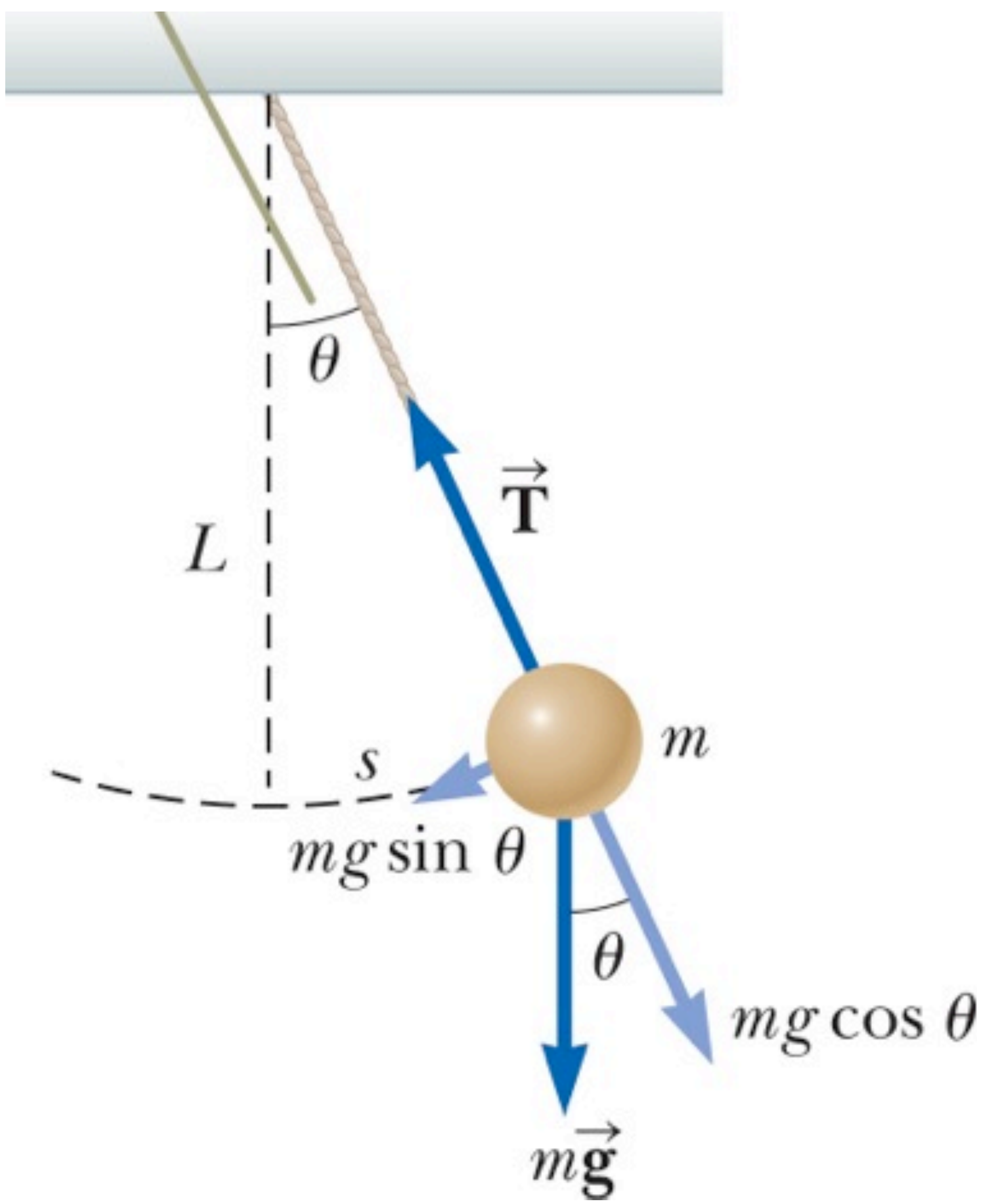
Pendule simple

$$ma = -mg\sin\theta$$

$$ma = -mg\frac{s}{l}$$

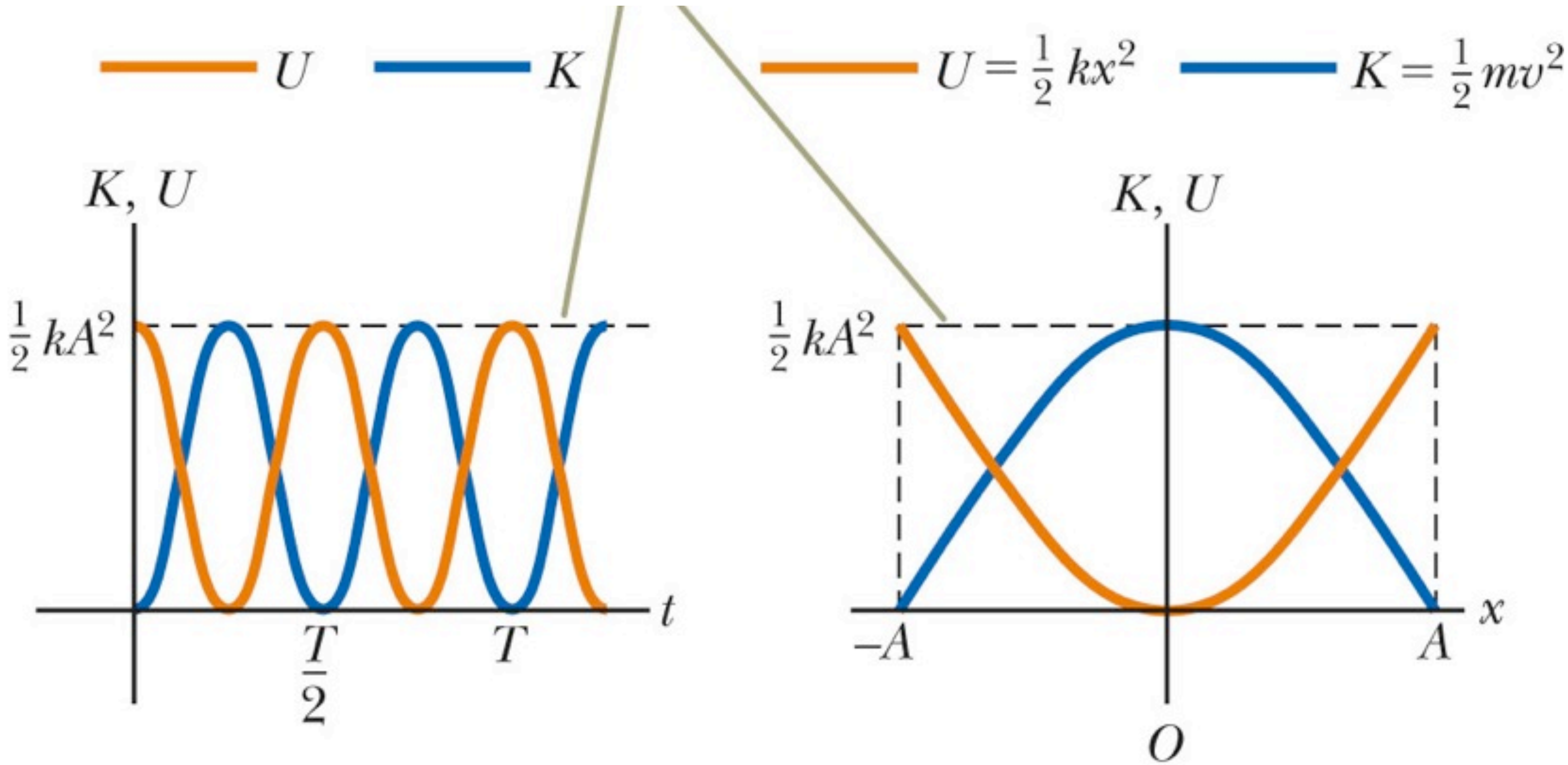
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Energie d'un oscillateur harmonique

$$\frac{1}{2}kA^2(\sin\omega t)^2 + \frac{1}{2}A^2\omega^2 m(\cos\omega t)^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

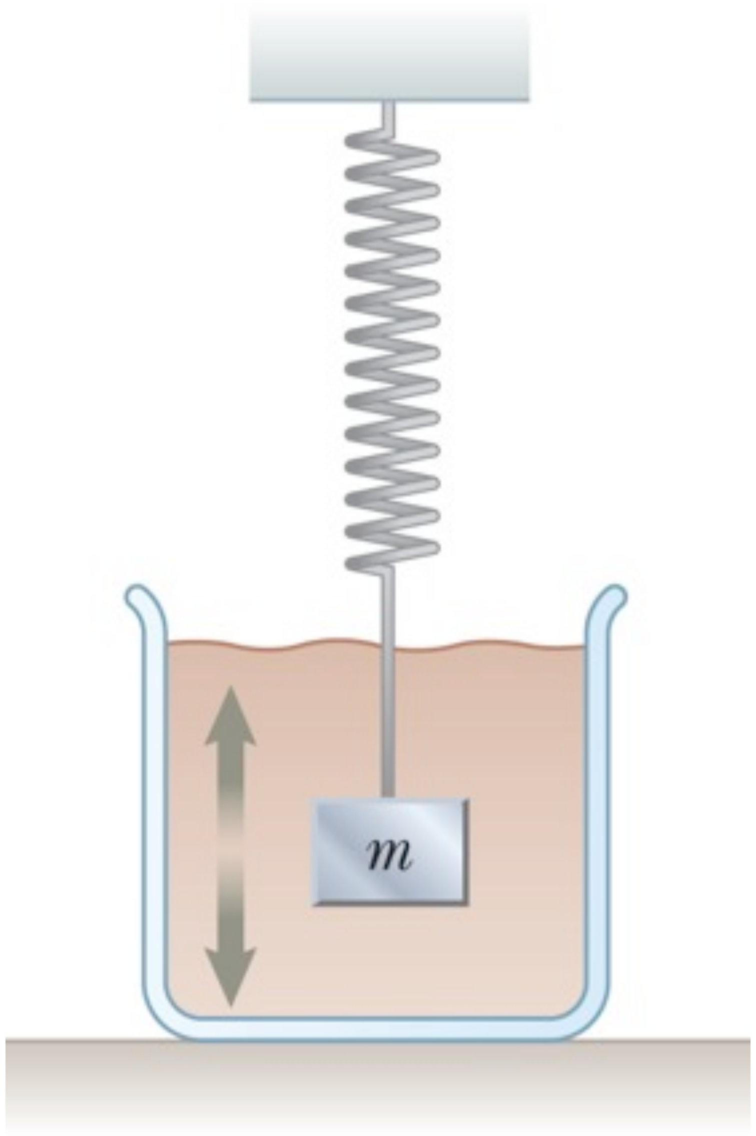


Oscillateur amorti

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

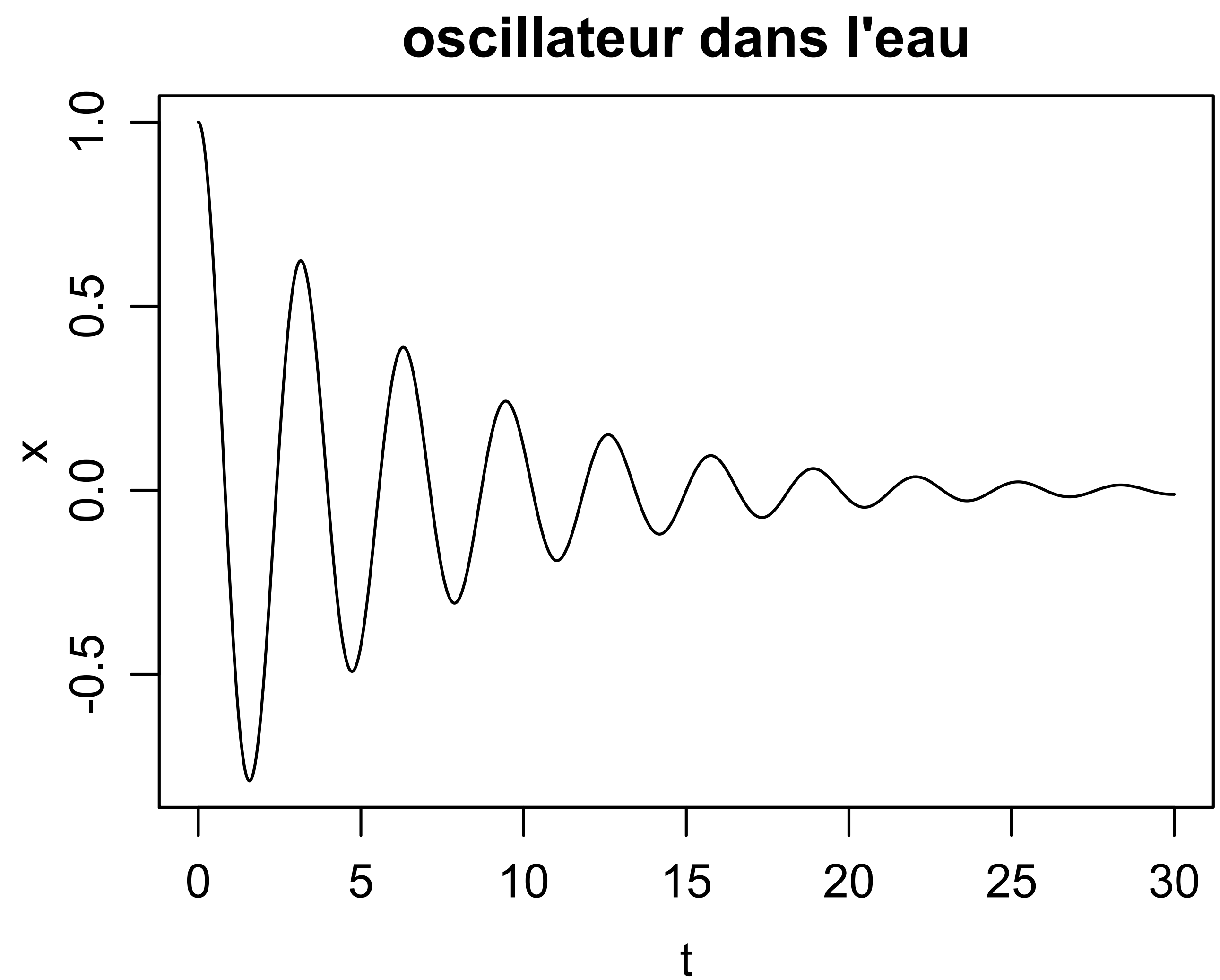


Faible amortissement

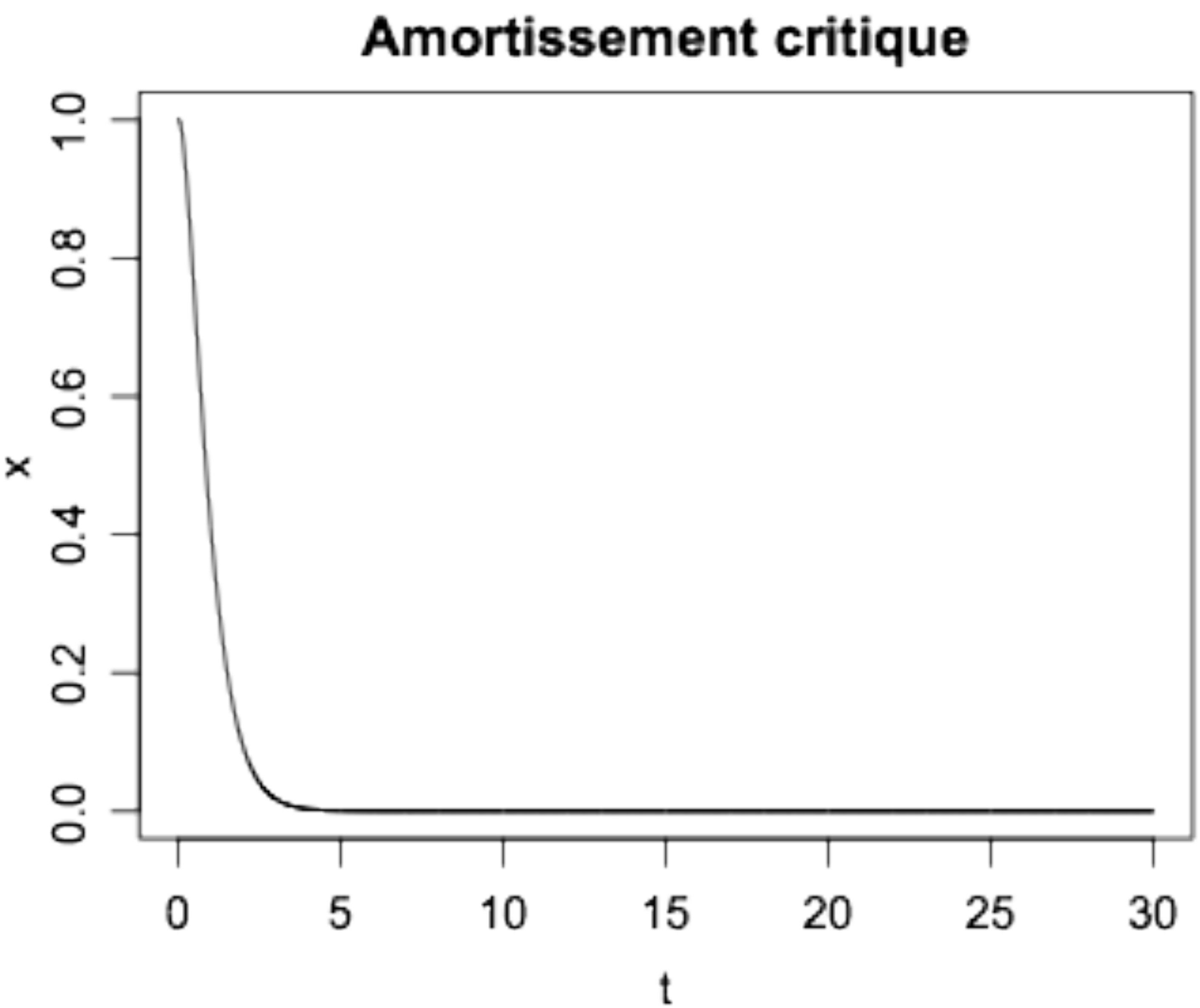
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0 > \gamma$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$



Oscillateur amorti critique



Si $\gamma=\omega_0$, les solutions deviennent dégénérés, et une nouvelle type de solution apparaît :

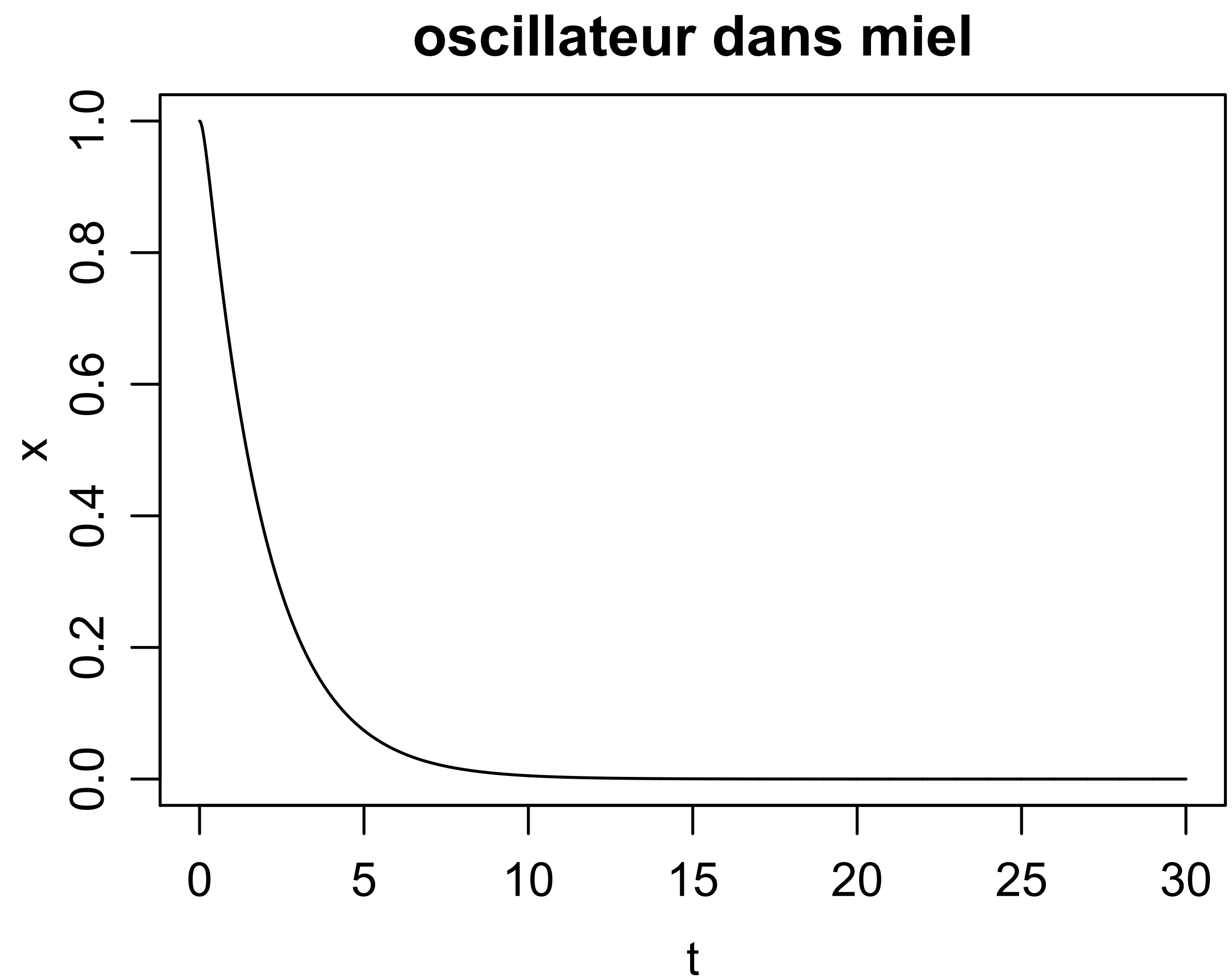
$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$$

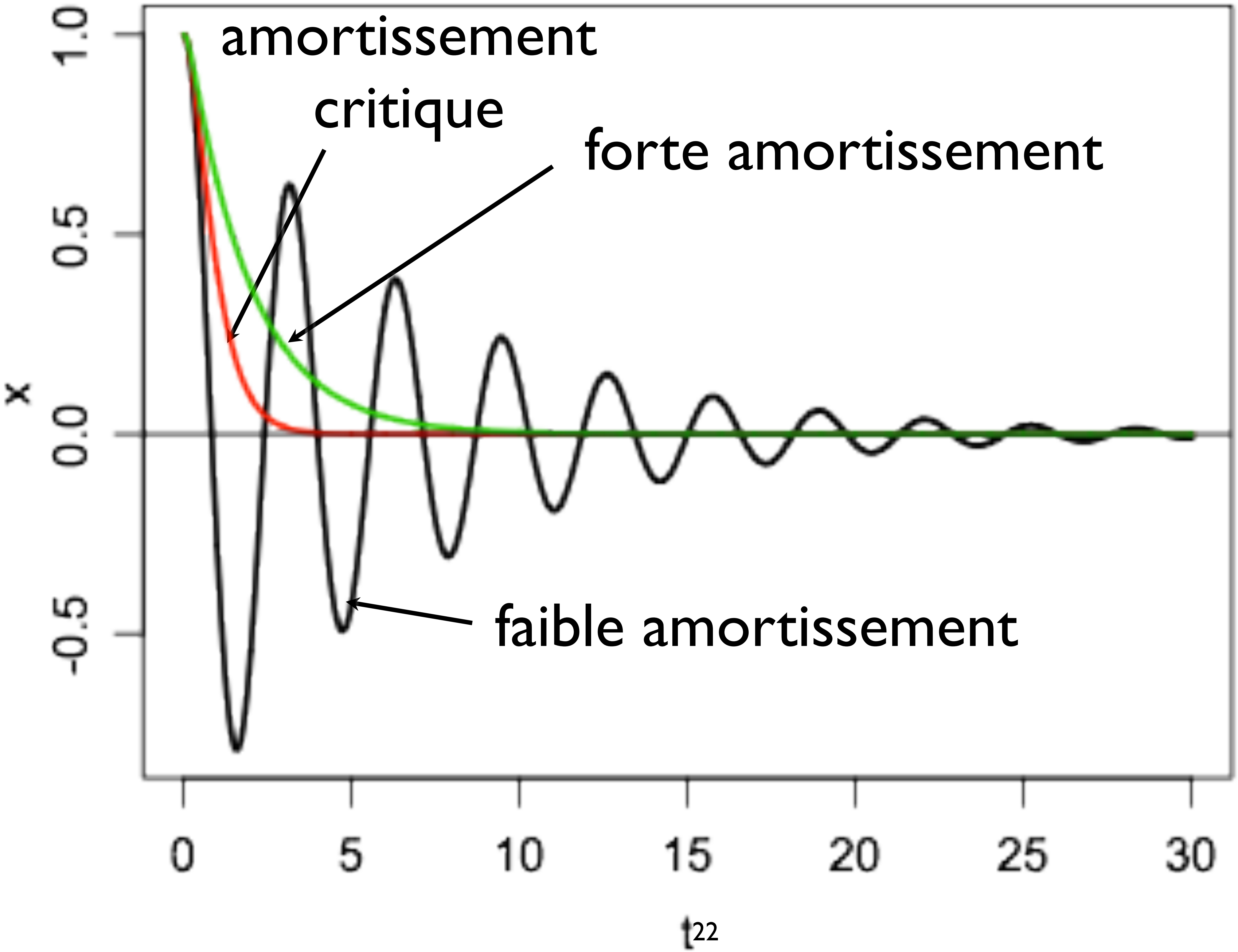
Forte amortissement

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0 < \gamma$$

$$x = A_1 e^{-\kappa_1 t} + A_2 e^{-\kappa_2 t}$$

$$\kappa_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$





amortissement critique
forte amortissement
faible amortissement
x
t
1.0
0.5
0.0
-0.5
0
5
10
15
20
25
30

Vibrations forcés

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx + F(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2\gamma i\omega Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

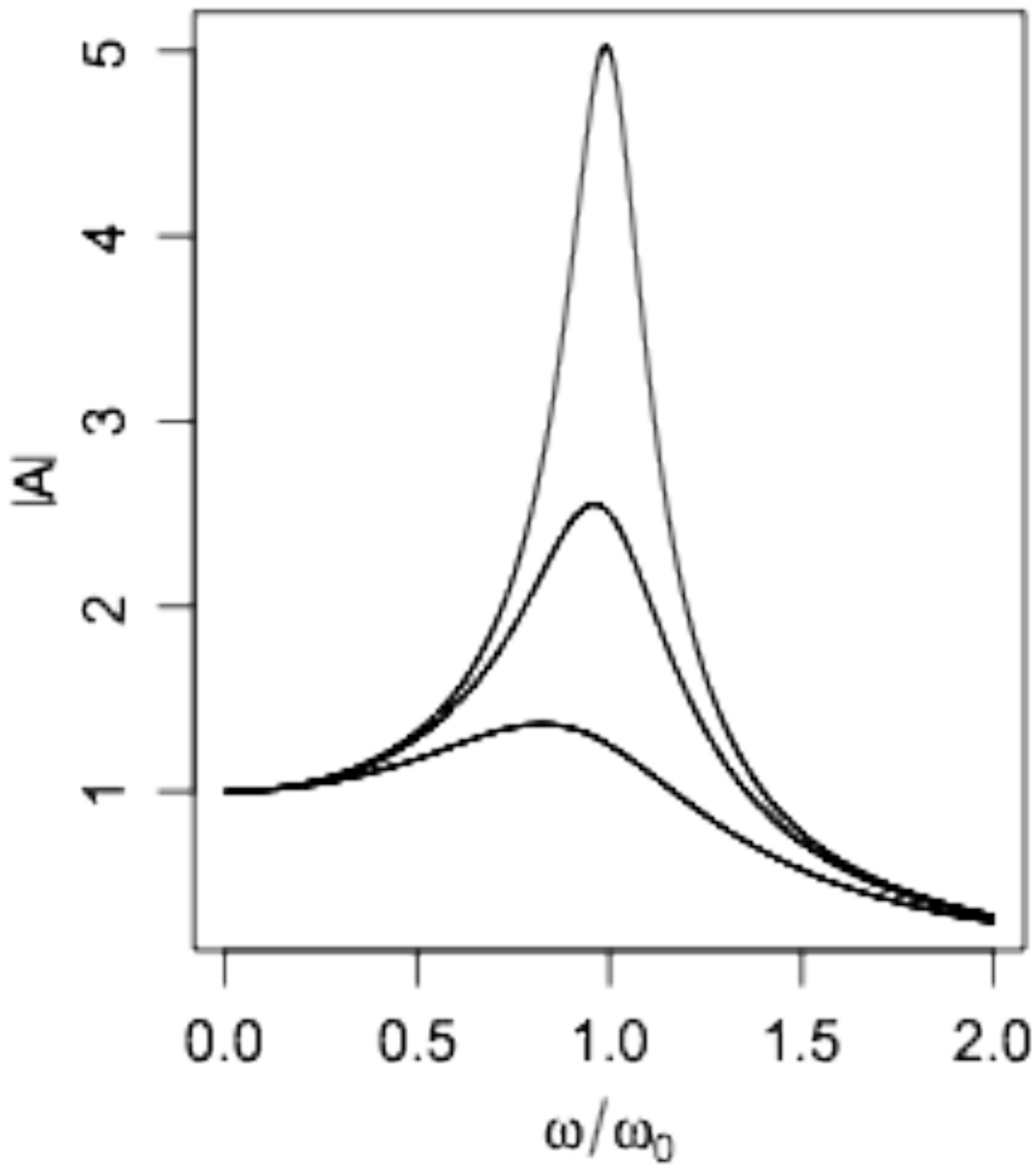
$$A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega}$$

Vibrations forcés

$$A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega}$$

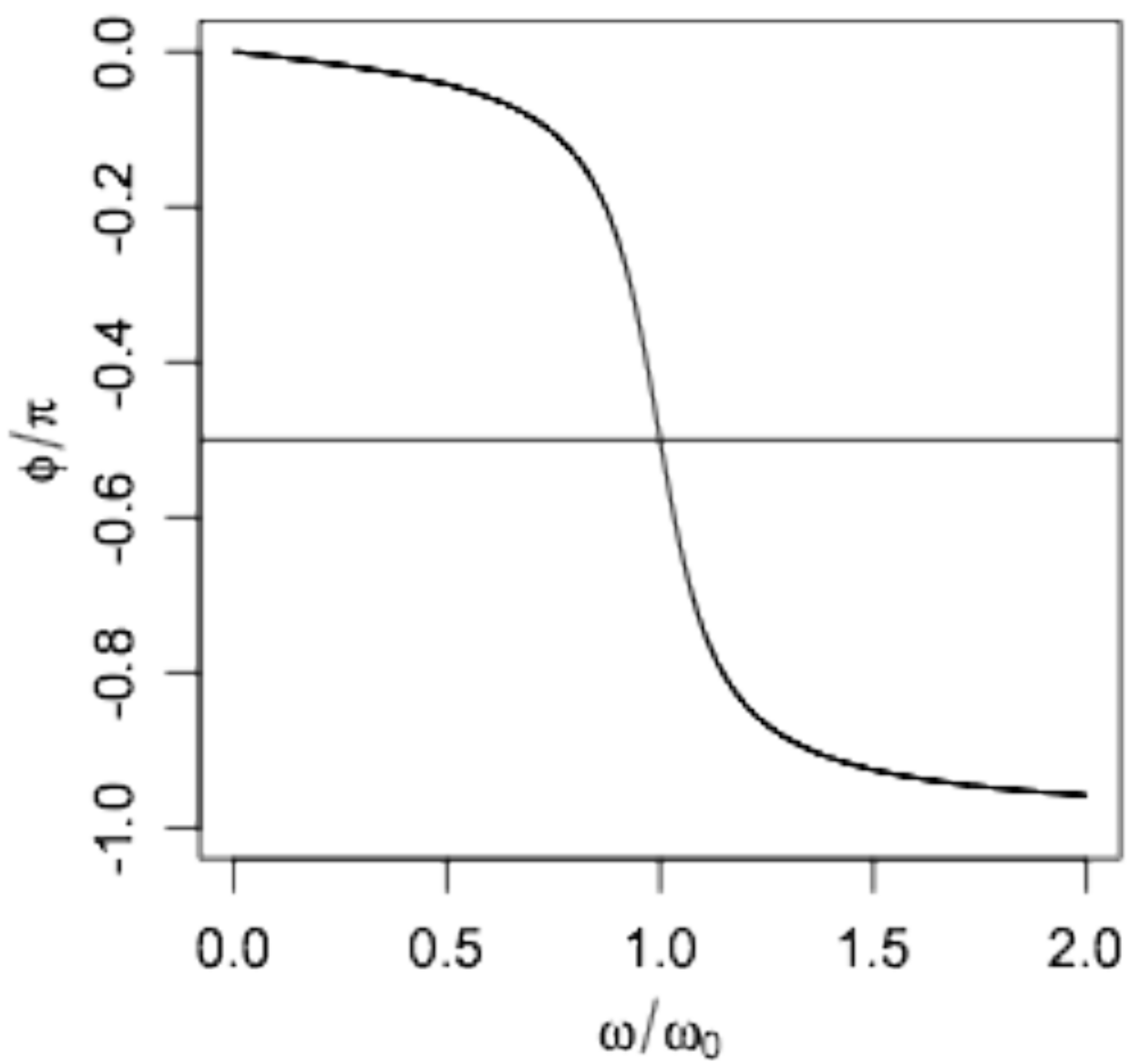
$$A = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

$$|A| = \sqrt{\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$



Vibrations forcés

Déphasage entre force et réponse. A la résonance, le déphasage es π/2, qui signifie que la vitesse est en phase avec l'excitation. Cela donne une transfert d'énergie très efficace, car la force est en phase avec la vitesse, son travail est toujours positive sur l'oscillateur.



Résonance

- Force en phase avec vitesse = transfert d’énergie efficace
- On parle de résonance, si deux systèmes oscillantes ont la même fréquence et il y a échange d’énergie entre le deux.